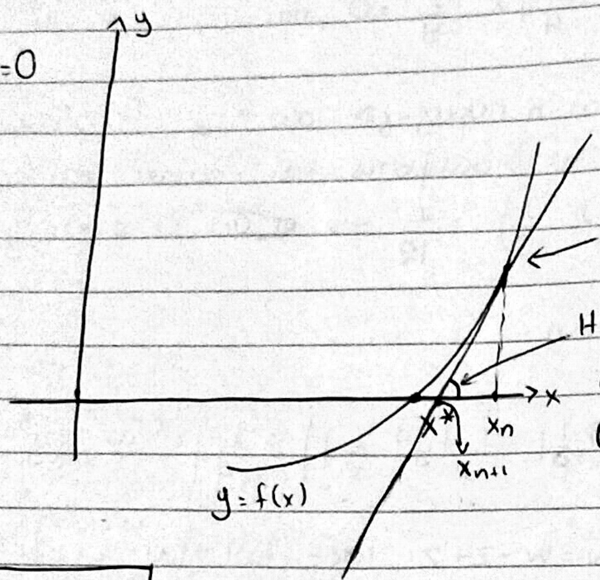
[redacted] 02/11/2015

"Η ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΟΥ ΝΕΥΤΩΝΑ" (Newton - Raphson)

$f(x)=0$



$y=f(x_n)+(x-x_n)f'(x_n)$, $f'(x_n)\neq 0$

Η f' είναι η εφαπτομένη αυτής της γωνίας.

$0=f(x_n)+(x_{n+1}-x_n)f'(x_n) \Leftrightarrow$

$x_{n+1}=x_n-\dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ $n=0,1,2,\dots$

υποθ. ότι η f 2 φορές παρ/μη

$\boxed{\phi(x)=x-\dfrac{f(x)}{f'(x)}}$ Ανάπτυξη κατά Taylor της $f(x^*)$ στο x_n Άρα

$0=f(x^*)=f(x_n)+(x^*-x_n)f'(x^*)+\frac{1}{2}(x^*-x_n)^2 f''(\xi)$

όπου ξ μεταξύ. Διαγράφω τον τελευταίο όρο και θεωρώ x_{n+1} στη θέση του x^*

τότε $x_{n+1}=x_n-\dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

Θεώρημα (Τοπικής σύγκλισης της μεθόδου Νεύτωνα) f 2 φορές συνεχ. παραγ. στην περιοχή της ρίζας.

Έστω x^* μία απλή ρίζα της εξίσωσης $f(x)=0$ $\left(f(x^*)=0, f'(x^*)\neq 0\right)$

Τότε υπάρχει μία περιοχή I με κέντρο το x^* τέτοια ώστε, η μέθοδος του Νεύτωνα να συγκλίνει για κάθε $x_0\in I$. Επιπλέον, $\lim_{n\to\infty}\dfrac{x_{n+1}-x^*}{(x_n-x^*)^2}=\dfrac{f''(x^*)}{2f'(x^*)}$

Δηλ. η τάξη σύγκλισης είναι τουλ. 2 και αν $f''(x^*)\neq 0$ είναι ακριβώς 2.

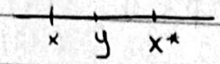
$\phi(x)=x-\dfrac{f(x)}{f'(x)}$ $\phi'(x)=1-\dfrac{f'(x)^2-f(x)f''(x)}{f'^2(x)}=\dfrac{f(x)\,f''(x)}{f'^2(x)}$

$\phi'(x^*)=\dfrac{f(x^*)\,f''(x^*)}{f'^2(x^*)}=0$

$\hookrightarrow$ Αφού το x^* είναι ρίζα της f.

Λόγω της συνέχειας της $\phi'(x)$ θα υπάρχει περιοχή I με κέντρο x^* ώστε $|\phi'(x)| \le L < 1$. Τότε η ϕ είναι συστολή στο I.

→ Είναι καλώς ορισμένη επειδή x^* είναι μέσο του διαστήματος $|\phi(x) - x^*| = |\phi(x) - \phi(x^*)| \le L|x - x^*| < |x - x^*|$



Αναπτύσσω κατά Taylor την $f(x_n)$ και της $f'(x_n)$ στο σημείο x^*

$$f(x_n) = f(x^*) + (x_n - x^*) f'(x^*) + \frac{1}{2} f''(\xi_{n_1}), \quad \xi_{n_1} \text{ μεταξύ } x_n \text{ κ' } x^*$$

$$f'(x_n) = f'(x^*) + (x_n - x^*) f''(\xi_{n_2}), \quad \xi_{n_2} \text{ μεταξύ } x_n \text{ κ' } x^*$$

$$x_{n+1} - x^* = x_n - x^* - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - x^* - \frac{(x_n - x^*) f'(x^*) + \frac{1}{2}(x_n - x^*)^2 f''(\xi_{n_1})}{f'(x^*) + (x_n - x^*) f''(\xi_{n_2})}$$

$$= x_n - x^* - \frac{(x_n - x^*)\left[f'(x^*) + (x_n - x^*) f''(\xi_{n_2})\right] - (x_n - x^*)^2 f''(\xi_2) + \frac{1}{2}(x_n - x^*)^2 f''(\xi_1)}{f'(x^*) + (x_n - x^*) f''(\xi_{n_2})}$$

$$= (x_n - x^*)^2 \frac{f''(\xi_{n_2}) - \frac{1}{2} f''(\xi_{n_1})}{f'(x^*) + (x_n - x^*) f''(\xi_{n_2})}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1} - x^*}{(x_n - x^*)^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{f''(\xi_{n_2}) - \frac{1}{2} f''(\xi_{n_1})}{f'(x^*) + (x_n - x^*) f''(\xi_{n_2})} = \frac{f''(x^*) - \frac{1}{2} f''(x^*)}{f'(x^*)} = \frac{f''(x^*)}{2 f'(x^*)}$$

<u>ΘΕΩΡΗΜΑ Ολικής Σύγκλισης (της μεθόδου του Newton).</u>

Έστω $a \in \mathbb{R}$ και $f: [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[a, +\infty)$ και $f(a) < 0$, $f'(x) > 0$, $f''(x) > 0$ $\forall x \in [a, +\infty)$. Τότε υπάρχει μοναδική ρίζα ρ της $f(x) = 0$ που ανήκει στο $(a, +\infty)$ και η μέθοδος του Newton συγκλίνει στη ρίζα ρ για κάθε $x_0 \in [a, +\infty)$

<u>Απόδ</u> Για την ύπαρξη μοναδικής ρίζας αρκεί να βρω $b \in (a, +\infty)$ τ.ω. $f(b) > 0$

Αναπτύσσω κατά Taylor την $f(b)$ στο a τότε $f(b) = f(a) + (b-a) f'(a) + \frac{1}{2}(b-a)^2 f''(\xi)$

$[\xi \in (a, b)]$ $> f(a) + (b-a) f'(a) > 0 \Rightarrow b > a - \frac{f(a)}{f'(a)}$ ⟹ ~~Υπάρχει~~ τέτοιο b αφού $-\frac{f(a)}{f'(a)} > 0$

a) Έστω $x_0 \in [a, \rho)$. Αναπτύσσω κατά Taylor $f(x_1)$ στο x_0

$$f(x_1) = f(x_0) + (x_1 - x_0) f'(x_0) + \frac{1}{2}(x_1 - x_0)^2 f''(\xi) \Rightarrow f(x) > \underbrace{f(x_0) + (x_1 - x_0) f'(x_0)}_{=0}$$

$\left(x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \right)$ Υποθ. χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι $x_0 > \rho$

Εστω $\lambda > \rho$ και μ τ.ω. $\mu = \lambda - \dfrac{f(\lambda)}{f'(\lambda)}$ Θα αποδ. ότι $\mu \in (\rho, \lambda)$

Είναι προφανές ότι $\mu < \lambda$ αφού $\dfrac{f(\lambda)}{f'(\lambda)} > 0$

Αναπτύσσω κατά Taylor της $f(\rho)$ στο λ : $0 = f(\rho) = f(\lambda) + (\rho - \lambda) f'(\lambda) + \frac{1}{2}(\rho - \lambda)^2 f''(\xi)$
$> f(\lambda) + (\rho - \lambda) f'(\lambda) \iff \rho - \lambda < \dfrac{f(\lambda)}{f'(\lambda)} \iff \rho < \lambda - \dfrac{f(\lambda)}{f'(\lambda)} = \mu.$

Άρα $\rho < \mu$

Η ακολουθία που παράγει η μέθοδος του Νεύτωνα με $x_0 > \rho$ είναι φθίνουσα ακολουθία και φράσσεται απ' το ρ, επομένως συγκλίνει. Αν y είναι το όριό της τότε $y = y - \dfrac{f(y)}{f'(y)} \iff f(y) = 0 \iff y = \rho$